



Topoğrafya

7. DERS ÖLÇME HATALARI



ÖLÇÜ DEĞERİ

- Bir büyüklüğün ölçüler sonucunda elde edilen değeri, bu büyüklüğün bir yaklaşık değeri gibi algılanır. O büyüklüğün gerçek değeri bilinmez, ölçüler sonucu bu değere yaklaşılır.
- Gerçek değer = Ölçü değeri + Ölçü hatası
- Gerçek değer bilinemeyeceğine göre en yüksek olasılıklı değerden söz edilir.



EN YÜKSEK OLASILIKLI DEĞER

- Bir büyüklük “n” kez ölçülmüş, $l_1+l_2+l_3+\dots+l_n$ değerleri bulunmuşsa, bu büyüklüğün olasılığı en yüksek olan değeri :

$$x = (l_1+l_2+l_3+\dots+l_n) / n$$

dir. Bu değere **ARİTMETİK ORTALAMA** denir.

Ölçü hatası : $v_i = l_i - x$ dir.

Ölçülerin duyarlılığı ise **STANDART HATA**, ya da **KARESEL ORTALAMA HATA** ile ölçülür.



KARESEL ORTALAMA HATA

- Karesel Ortalama Hata, ya da Standart Hata ölçü hatalarının karelerinin toplamının, “n-1” bölünmesi ve karekökünün alınması ile elde edilir :

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n - 1}}$$

- Sigma değerinin küçük olması ölçü değerlerinin birbirine yakınlığı, ölçünün duyarlı olduğu anlamına gelir.



ÖLÇÜ HATALARI KÜMESİ

- Ölçü hatalarının dağılımı normal dağılım, ya da çan eğrisi olarak bilinir. Bu dağılımda pozitif ve negatif işaretli ölçü hatalarının sayısı birbirine eşittir. En yüksek olasılıklı hata değeri $v = 0$ 'dır. Diğer hataların dağılımı ise aşağıdadır :

Sigma (Standart hata)	Olasılık :	% 68.27
0.6745 Sigma (Olası hata)	“ :	% 50
1.6449 Sigma (Maks. hata)	“ :	% 90
1.9599 Sigma (Maks. hata)	“ :	



ORTALAMANIN ORTALAMA HATASI



- Aritmetik ortalamamanın da ortalama hatası : Standart hata, ya da bir ölçünün ortalama hatasını, ölçü sayısının kareköküne bölerek bulunur :

$$\sigma_{\tau} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}}$$

- Ortalama değerin olası ve maksimum hataları da, bir ölçünün ortalama hatasına benzer şekilde tanımlanır.



SAYISAL ÖRNEK (1)

Ölçü (l_i)	Hata(v_i)	$(v_i)^2$ (mm ²)
728.89	-0.015	225
.92	+0.015	225
.91	+0.005	25
.87	-0.035	1225
.90	-0.005	25
.95	+0.045	2025
729.04	+0.135	18225
728.86	-0.045	2025
.92	+0.015	225
.79	-0.115	13225
728.905	0	37450

Aritmetik Ortalama : 728.905

Bir ölçünün ortalama hatası :
0.064

Ortalamanın ortalama hatası :
0.020



SAYISAL ÖRNEK (1)

- Ölçü hataları için olası ve maksimum hatalar :
 - 1) Ölçülerin % 68.27'si, yaklaşık 7'si, sigma değerinden küçük (Bu kümede 8)
 - 2) Ölçülerin % 50'si, yaklaşık 5'i, $0.6745 \text{ sigma} = 0.043$ değerinden küçük (Bu kümede 6)
 - 3) Ölçülerin % 90'ı, yaklaşık 9'u, $1.6449 \text{ sigma} = 0.105$ değerinden küçük (Bu kümede 8)

NOT : Ölçü hatalarının ve sigmanın mutlak değeri dikkate alınacaktır.



SAYISAL ÖRNEK (2)

- Yedinci ölçünün (729.04) yanlış olduğu varsayılır ve ölçü kümesinden çıkarılırsa ;
 - Ortalama değer : 728.890,
 - Bir ölçünün ortalama hatası : 0.046,
 - Ortalamanın ortalama hatası : 0.015
- bulunur. Olası ve maksimum ölçü hatalarının sayısının teorik beklentilere daha uygun olduğu görülür.



Ö D E V

- 1) Son ölçüyü de çıkararak, ortalamayı, bir ölçünün ortalama hatasını, ortalamanın ortalama hatasını bulunuz. Ölçü hataları için olası ve maksimum hataların teorik beklentiye ne ölçüde uyduğunu irdeleyiniz.
- 2) Çıkarılan iki ölçü yerine yeni ölçüler yapılmış ve 728.86, 728.88 değerleri bulunmuştur. Bu yeni ölçü değerleri ile aynı işlemleri yaparak sonuçları karşılaştırınız.



HATA TÜRLERİ

- Ölçme işlerinde üç tür hata ile karşılaşılır : KABA HATALAR, DÜZENLİ HATALAR, RASGELE, ya da KAÇINILMAZ HATALAR.
- Kaba hatalar : Ölçü sırasında yapılan yanlışlar, ya da büyük hatalardır. Sayısal Örnek (1)'de, yanlış olduğu varsayılan değer (729.04) gibi.
- Düzenli hatalar : Sistemik hata da adı verilen bu hatalar, ölçme donanımından, ya da çevre koşullarından kaynaklanan hatalardır. Örnek : Uzunluk ölçüsünde kullanılan şerit metrenin biraz kısa olması gibi.



DÜZENLİ HATALAR

- Düzenli hatalar, sonucu nasıl etkilediği bilinen hatalardır. Böyle bir hata söz konusu ise gerekli düzeltme yapılabilir. Örneğin, uzunluğunun 1 cm kısa olduğunu bildiğimiz bir 20 metrelik bir şerit metre ile ölçü yapılmışsa, uzunluklar her 20 metrede bir, 1 cm uzun ölçülmüş demektir. Ölçülen uzunluk 100 m ise, 5 şerit boyu ölçü yapılmış, sonuçta 5 cm uzun ölçülmüş, düzeltilebilir.



RASGELE HATALAR

- Kaçınılmaz hata da adı verilen bu hatalar gerçek ölçü hatalarıdır. Ölçü sayısı sonsuz olduğu varsayıldığında bunlar normal dağılım gösterirler.
- Normal dağılım sigma standart hata ile karakterize edilir. Sigmanın küçük olması ölçülerin birbirine yakın olması, ölçü hatalarının küçük olması anlamına gelir



EN KÜÇÜK KARELER İLKESİ

- Ölçme işlerinde, yapılması gerekli ölçülerden fazla ölçü yapılması istenir. Gereğinden fazla ölçü bir yandan kaba hata olasılığını ortadan kaldırırken, diğer yandan da her fazla ölçü elde edilmek istenen büyüklüğün doğruluğunu arttıracaktır.
- Gereğinden fazla ölçüler durumunda da aranan büyüklüklerin standart olması istenir.
- Bu amaç EN KÜÇÜK KARELER İLKESİ ile gerçekleştirilir.



EN KÜÇÜK KARELER İLKESİ

- Teknikte, pek çok mühendislik alanlarında ve ölçme bilgisi uygulamalarında, gereğinden fazla gözlem (ölçü) varsa, bilinmeyen büyüklüklerin bulunmasında EN KÜÇÜK KARELER İLKESİ uygulanır.
- En Küçük Kareler İlkesi, hataların karelerinin toplamının minimum olması sağlanır :



UYGULAMA

- Bir büyüklük n kez ölçülmüş ve I_1, I_2, \dots, I_n değerleri bulunmuştur. En olasılıklı değer x ise; En Küçük Kareler İlkesi :
- Türev alınır, sıfıra eşitlenirse
bulunur.



UYGULAMA

- Bu uygulama, bir büyüklük n kez ölçülmüşse bu büyüklüğün en yüksek olasılıklı değeri ARİTMETİK ORTALAMA' dır.
- Başka bir deyişle, Aritmetik Ortalama, En Küçük Kareler İlkesi'ne uygun bir kestirim değeridir.
- Aritmetik Ortalama'da, v 'ler toplamının da sıfır olduğu görülmektedir.



AĞIRLIK VE AĞIRLIKLI ORTALAMA

- Bir ölçünün standart sapması, sigmanın karesi **VARYANS** olarak adlandırılır.
- Varyansın tersine **AĞIRLIK** adı verilir :
- Ölçülerin duyarlılıkları birbirine göre farklı olabilir. Ağırlıklar göz önünde tutularak ortalama, açıkçası, ağırlıklı ortalama alınır :



HATA YAYILMA KURAMI

- Ölçülerin bir fonksiyonu olan bir büyüklüğün karesel ortalama hatası, ya da standart sapması da



UYGULAMA

- 1) Boyu 40, eni 30 m olan dikdörtgen biçiminde bir tarlanın kenarlarının doğruluğu 10 cm olduğuna göre bu dikdörtgenin alanının ortalama hatası ne kadardır ?
- 2) Bir uzunluk 20 m'lik çelik şeritle ve her şerit boyunda 2 cm'lik bir ortalama hata ile ölçü yapıldığı varsayılırsa, 100 m'lik bir uzunluk ne kadarlık bir ortalama hata ile ölçülecektir ?



Ö Z E T

- Ölçülen bir büyüklüğün gerçek değeri, teorik bir değerdir. Ölçülerle bu gerçek değer yerine yaklaşık bir değer elde ediyoruz.
- Her ölçü bir miktar hata içerir. Hatasız ölçü düşünülemez. Hataların etkisini azaltmak için, olası en yüksek olan kestirim değerini bulmak için En Küçük Kareler İlkesi uygulanır.
- Standart sapma, ya da standart hata, gerçek değere yakınlığı gösteren bir doğruluk ölçütü, ya da ölçülerin inceliğini, birbirine yakınlığını gösteren bir duyarlık ölçütüdür.



SORULAR

- 1) Ölçme pratiğinde her zaman gereğinden fazla ölçü yapılması istenir, neden ?
- 2) Gerçek değeri, ölçülerden elde edilecek kestirim değerini tanımlayınız.
- 3) Ölçme uygulamalarında karşılaşılabilecek hata türlerini sayınız.
- 4) Kaçınılmaz, ya da rasgele hata ne demektir ?
- 5) En Küçük Kareler İlkesi hakkında bilgi



TERİMLER

Gerçek değer	True value
Ölçü değeri	Measured value
Ölçü hatası	error, observation/measuring error
En yüksek olasılıklı değer	Most probable value
Karesel ortalama hata	Root Mean Square Error
Kaba hata	Blunder, mistake
Düzenli hata	Systematic error
Rasgele/Kaçınılmaz hata	Random/Accidental error
En Küçük Kareler İlkesi	Least Square Method
Ağırlıklı ortalama	Weighed mean
Doğruluk	Accuracy