



Topoğrafya

3. DERS TRİGONOMETRİK HESAPLAMALAR



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

- Trigonometrik fonksiyonların tanımları

Bir dik üçgende;

* sinüs : karşı dik kenar / hipotenüs

* kosinüs : komşu dik kenar / hipotenüs

* tanjant : karşı dik kenar / komşu dik kenar

Bu fonksiyonlar açılarla ilgilidir.

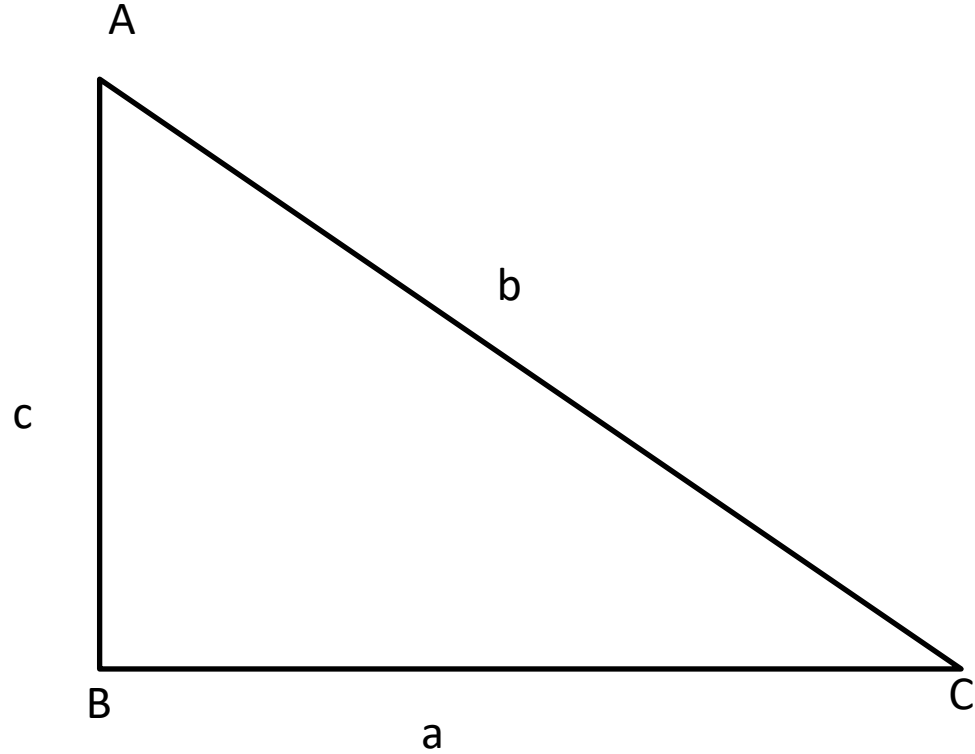
Örnekler :

$$\sin (37^{\circ}) = 0.601815023$$

$$\cos (37^{\circ}) = 0.798635510 \quad \tan (37^{\circ}) = 0.75.....$$



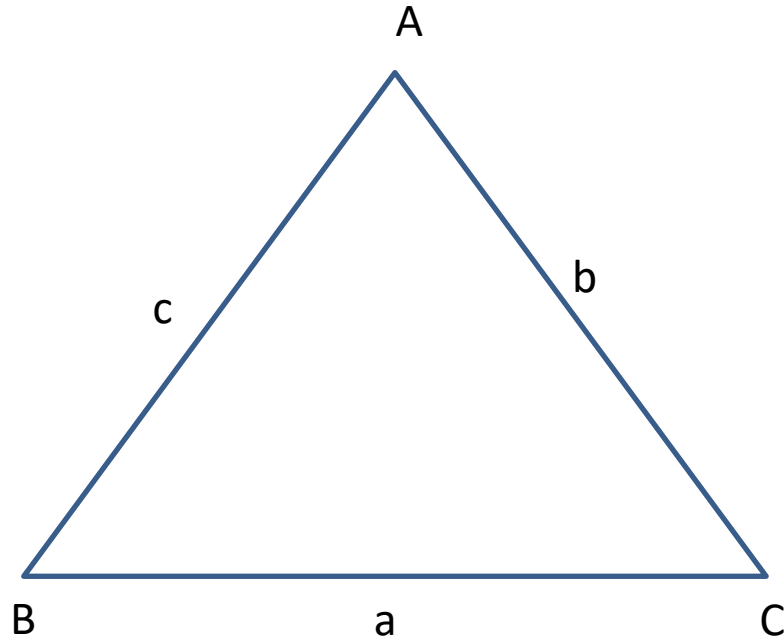
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



Dik üçgen



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR





TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

- Açıları A, B, C ve kenarları da a, b, c olan herhangi bir üçgende

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

biçimindeki sinüs ve kosinüs formülleri ile, birbirinden bağımsız üç elemanı bilinen bir üçgenin diğer elemanları bulunabilir.



ÜÇGEN ÇÖZÜMÜ



- $b = 6, c = 7, A = 56, a = ?$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 36 + 49 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos(56^\circ) = 38.02779611$$

$$a = 6.166668153$$

- $A = 32, B = 63, c = 8, a = ?, b = ?$

- $(C = 85^\circ)$

$$a = c \left(\frac{\sin A}{\sin C} \right) = 4.255547758$$

$$b = c \left(\frac{\sin B}{\sin C} \right) = 7.155280195$$



PRATİK SORUNLAR



- Gerçek yaşamda, pratikte, üçgen kenarları ve açıları, genellikle ve çoğunlukla tam sayılar değildir ; gerçel sayılardır.
- Trigonometrik fonksiyonların değerleri de, genellikle ve çoğunlukla, gerçel sayılardır.
- Hesaplama sonucunda da, aslında sonsuza kadar süren, ancak hesap makinesinin olanakları ile sınırlanan sayı katarı ile karşılaşılacaktır.



SORULAR



- Trigonometrik fonksiyonların değerleri kaç basamak alınmalıdır ?
- Trigonometrik fonksiyon değeri, hesap makinesinden alınıp bir başka yere taşınacak ve onunla hesap yapılacaksa, anlam taşıyacak basamağa kadar, hesaplar aynı makine ile yapılacak ise trigonometrik fonksiyon değeri makinedeki kadar alınmalı.



SORULAR

- Hesaplama sonucunda elde edilen büyüklük, olasılıkla, virgülden sonra üç-beş, hatta daha fazla sayılar olacaktır. Virgülden sonra, acaba, kaç basamak alınır ?
- Bilgi taşıyan, anlamlı olan basamak göz önünde tutularak yuvarlatma yapılır. Kimi özel durumlarda, güvenlik için, bir basamak fazla alınabilir.
- Örnek : Bir uzunluk, trigonometrik bir hesaplama sonucunda 26.7234189 m olarak bulunmuşsa, 26.72 m, ya da 26.723 m alınır.



SORULAR

- Anlamalı basamak, ya da anlamalı sayı ne demektir ?
- Anlamalı basamak bilgi taşıyan basamak demektir. Bir önceki örnekte 26.723'ten sonraki basamaklar, ölçme inceliğimiz mm, ya da cm ise, geriye kalan basamaktaki sayılar bir anlam taşımazlar.



SORULAR

- Yuvarlatma nedir ? Nasıl yapılır ?
- Sayıları anlamlı basamakta keserken, atılacak kısmın göz önünde tutulması, ilkeli kuyruk kesme işlemidir. Şöyle yapılır : Atılacak ilk sayı, 5'ten küçükse kuyruk atılır. 5'ten büyükse sayı bir arttırılır. Atılacak sayı 5 ise; son sayıya göre, karar verilir ; çift ise atılır, tek ise çift sayıya yükseltilir
- yuvarlanacak basamaktan bir sonraki hanedeki rakamın 5 olması durumunda (ondalık sistemin göbeği) da şöyle bir az bilinen genel geçer kural vardır: bir önceki basamak çiftse olduğu gibi bırakılır, tekse bir arttırılır.

örneğin virgülden sonra 2 basamağa yuvarlıyoruz diyelim:

5.665 \approx 5.66 olurken,
5.675 \approx 5.68 olur.



YUVARLATMA ÖRNEKLERİ



- Aşağıdaki gerçel sayılar, virgülden sonra üç basamak, iki basamak, bir basamak ve tam sayıya yuvarlatılmıştır.

623.5820516

623.582, 623.58, 623.6, 624

74.05639542

74.056, 74.06, 74.1, 74



AÇI BİRİMLERİ

- Açı ölçüsü için kullanılan birimler : RADYAN, DERECE, GRAD (GON).
- Bir tam daire 2π radyandır. 1 Radyan bir tam dairenin $1/2\pi$ 'sidir.
- Bir tam daire 360 derecedir. Ya da 1 derece bir tam dairenin $1/360$ 'dır.
- Bir tam daire 400 grad, ya da gon'dur. Ya da 1 gon bir tam dairenin $1/400$ 'dür.



ÖLÇME BİLGİSİ UYGULAMALARINDA AÇI BİRİMİ



- Metrik Sistemi kullanan pek çok ülkede, arazide kullanılan açı ölçme aletlerinde grad (gon) birimi kullanılmaktadır. Bu nedenle, bundan böyle grad birimi ile çalışılacaktır.
- Bu birimin alt birimlerinin, altmışlık yerine onluk sistem olması, dereceye göre üstünlüktür.
- $1 \text{ gon} = 100 \text{ cgon} = 1000 \text{ mgon}$ 'dur. Açı ölçmelerinin duyarlılığı da çoğu kez 1 mgon 'dur.

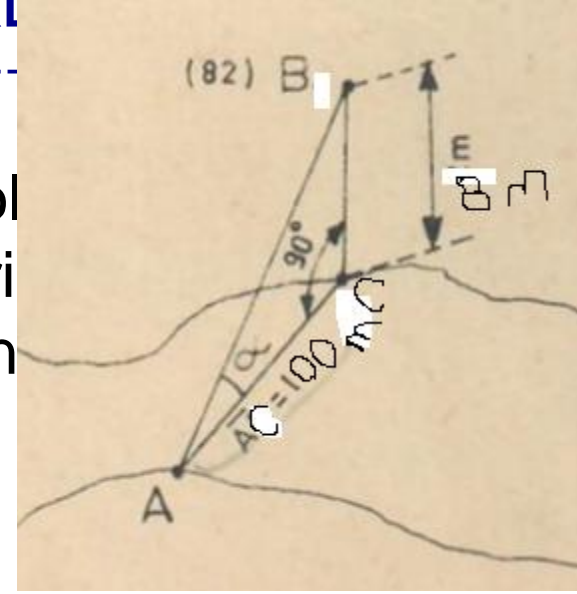


AÇI BİRİMİNİN AYARLANMASI

- Hesaplayıcılar, MODE fonksiyonu yardımı ile her üç açı birimi ile de çalışabilir. Trigonometrik fonksiyonlarla çalışılmağa başlamadan önce açı birimine göre Mode fonksiyonu ayarlanır.
- Bir hesaplayıcının hangi açı birimine ayarlı olduğunu anlamak için basit bir test uygulanabilir : $\text{arc tan}(1) = ?$ Sonuç 45 ise derece, 50 ise grad, ya da $\pi/4$ ise radyandır.

EĞİM, EĞİM AÇISI, EĞİK UZAKLIK

- A ve B noktaları yer üzerinde iki nokta ol-
geçen yatay düzleme B noktasından indiril-
C olsun. Yatay uzunluk $AC= 100$ m, iki n-
arasındaki yükseklik farkı, $BC = 8$ m ise ;



- Eğim = $\tan A = BC / AC = 8/100 = \% 8,$
- Eğim açısı = $A = ?$ $\tan A = 0.08$ $A = 5.08$ gon
- Eğik uzaklık = $AB = AC / \cos A = 100.32$ m.



ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ (KKK)



$a = 38.43 \text{ m}$, $b = 45.16 \text{ m}$, $c = 60.25 \text{ m}$, $A=?$, $B=?$, $C=?$

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$$

$$A = 44^{\text{G}}.0062$$

$$\cos B = (a^2 + c^2 - b^2) / (2ac)$$

$$B = 53^{\text{G}}.9067$$

$$\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$$

$$C = 102^{\text{G}}.0871$$

$$A + B + C = 200^{\text{G}}.0000$$



ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ (KAK)

$$a = 38.43 \text{ m} \quad b = 45.16 \text{ m} \quad C = 102^{\circ}.0871,$$
$$c = ?, \quad A = ?, \quad B = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \dots \quad c = 60.25$$

$$\sin A = (a/c) \sin C \quad \dots \quad A = 44^{\circ}.0062$$

$$\sin B = (b/c) \sin C \quad \dots \quad B = 53^{\circ}.9067$$

$$\text{Kontrol : } A + B + C = 200^{\circ}.0000$$



ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ (AKA)

$$A = 44^{\text{G}}.0062, \quad B = 53^{\text{G}}.9067, \quad c = 60.25 \text{ m}$$

$$C = ?, \quad a = ?, \quad b = ?$$

$$C = 200^{\text{G}} - (A+B) = 102^{\text{G}}.0871$$

$$a = c (\sin A / \sin C)$$

$$a = 38.43 \text{ m}$$

$$b = c (\sin B / \sin C)$$

$$b = 45.16 \text{ m}$$



ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ (KKA)

$$a = 38.43 \text{ m}, \quad b = 45.16 \text{ m}, \quad B = 53^{\text{G}}.9067,$$
$$A = ?, \quad C = ?, \quad c = ?$$

$$\sin A = (a/b) \sin B$$

$$A = 44^{\text{G}}.0062$$

$$C = 200^{\text{G}} - (A + B)$$

$$C = 102^{\text{G}}.0871$$

$$c = a (\sin C / \sin A)$$

$$c = 60.25 \text{ m}$$

Büyük kenar karşısındaki açı verilmişse, buradaki gibi, b kenarı a kenarından büyük ve B açısı verilmiş ise ;
çözüm tekdir.



ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ (KKA)

$$a = 38.43 \text{ m} \quad b = 45.16 \text{ m} \quad A = 44^{\text{G}}.0062$$

$$B = ?, \quad C = ?, \quad c = ?$$

$$\sin B = (b/a) \sin A \dots B1=53^{\text{G}}.9066, \quad B2=146^{\text{G}}.0934$$

$$C=200-(A+B) \dots C1=102^{\text{G}}.0871, \quad C2= 9^{\text{G}}.9004$$

$$c = b (\sin C / \sin B) \dots c1 = 60.25 \text{ m} \quad c2 = 594.43 \text{ m}$$

Küçük kenar karşısındaki açı verilmişse çift çözüm :
(a,b,c1,A,B1,C1) , (a,b,c2,A,B2,C2)



ÜÇGEN ALANI



$$a = 38.43 \text{ m} \quad b = 45.16 \text{ m} \quad c = 60.25 \text{ m} \quad F = ?$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$F = 867.283 \text{ m}^2 \quad F^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$a = 38.43 \text{ m}, \quad b = 45.16 \text{ m}, \quad C = 102^\circ.0871, \quad F = ?$$

$$F = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$F = 867.283 \text{ m}^2$$



İLKELİ HESAPLAMA

- Mühendis ve mimar adayı öğrencilerden güvenilir ve doğru hesaplamalar yapması beklenir.
- Hesap yapmağa başlamadan önce problem iyice düşünülür, baştan sona bir hesap planı yapılır, sonra hesaba başlanır.
- Bulunacak hesap sonuçları, önceden, yaklaşık olarak kestirilir, bulunacak sonuçlar ön kestirimler ile karşılaştırılır ve mantık süzgecinden geçirilir.
- Son değerler anlamlı olacak sayılara yuvarlatılır.



Ö Z E T

- Birbirinden bağımsız üç elemanı verilen bir üçgenin çözümü, trigonometrik formüllerle ve basit hesaplayıcılarla kolaylıkla yapılabilir.
- Güvenilir bir hesaplama ve doğru sonuçlara ulaşmak için önce bir hesaplama planı yapmak önerilir. Elde edilecek sonuç değerlerin bir mantık süzgecinden geçirilmesi ve son değerlerin anlamlı basamaklara yuvarlatılması uygun olacaktır.



SORULAR

- 1) Kenarları, yer yüzeyinde iki nokta arasındaki eğik uzaklık, yatay uzaklık ve yükseklik farkı olan üçgen nasıl bir üçgendir ?
- 2) Üç kenarı verilen bir üçgenin açıları, kontrollü olarak nasıl hesaplanır ?
- 3) Kenarları, 10.00, 10.00 ve 14.18 olan bir ikizkenar üçgenin tepe açısının dik açıdan ne kadar sapmış olduğunu hesaplayınız.
- 4) Önceki sorudaki üçgenin alanını hesaplayınız.



TERİMLER

Tam sayı	Integer
Gerçel sayı	Real number
Anlamlı basamak	Significant figures
Yuvarlatma	Round off
Ölçme inceliği	Measuring precision
Açı birimleri	Units of angular measurement
Onluk sistem	Decimal system
Altmışlık sistem	Sexagesimal system
Üçgen alanı	Area of triangle